08/11/16.

① j-παροδική ($f_{jj}^{*} < 1$) $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)} < +\infty$ κ' $\sum_{n=1}^{+\infty} P_{ij}^{(n)} < +\infty, \forall i$

άρα $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = 0$

② j-επαν/κή $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ αποκλίνει κ' τότε αποκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$ αποκλίνει $\forall i \to j$

③ j επαν/κή κ' απεριοδική τότε $\lim_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$, $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}(1)}{\mu_j}$

• ασθενώς επ/κή $\mu_j = \infty$ άρα $\lim P_{jj}^{(n)} = 0$

• i επ/κή κ' $i \to j \Rightarrow j \to i$

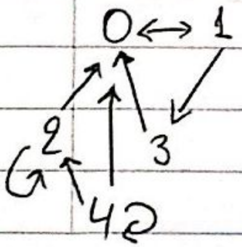
• Από επ/κές μόνο επ/κές προσιτές

• Κλάσεις επικοινωνούντων ⟹ ΟΛΕΣ ΙΔΙΟΥ ΤΥΠΟΥ

• Μη-διαχ. πεπ/νου πλήθους ⟹ ∃ επ. επ/κή

Π.χ. ① :

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{array}$$



{0,1,3} κλειστό κύκλωμα επικ/των καταστάσεων

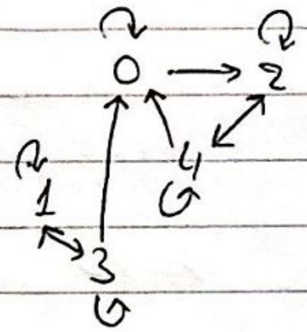
$2 \to 0$ όμως $0 \not\to 2 \Rightarrow 2$: παροδική. γιατί αν υποθ. ότι 2 επαν., έχω $2 \to 0$ τότε θα

έπρεπε κ' $0 \to 2$ άτοπο $\Rightarrow$ 2: παροδική.
$4 \to 0$ όμως $0 \not\to 4$ $\Rightarrow$ 4: παροδική. (όμοια με 2).
Οριακές πιθανότητες: $\pi_2 = \pi_4 = 0$
$\{0,1,3\}$ κλειστό κύκλωμα επικ/νων καταστάσεων, Μη-διαχ. πεπ/νου πλήθους $\Rightarrow$ 0, 1, 3: θετικώς επ/κές.

$$P' = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Π.χ ②:

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \end{array}$$



$1 \to 0$ ενώ $0 \not\to 1$ άρα 1: παροδική (αν ήταν επ/κή $\Rightarrow$ .. άτοπο).
$3 \to 0$ ενώ $0 \not\to 3$ άρα 3: παροδική $\Big\} \Rightarrow \pi_1 = \pi_3 = 0$
$\{0,2,4\}$ κλειστό κύκλωμα μη-διαχ. πεπ/νου πλήθους καταστάσεων
$\Rightarrow$ 0, 2, 4: θετικώς επαν/κές.

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdots \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Μη-διαχωρίσιμη Αλυσίδα.
Δεν γνωρίζω αν είναι θετ. επ/κές ή όχι

Θεώρημα Foster: Σε μία μη-διαχωρίσιμη εργοδική (δηλαδή θετικώς επαναληπτική κ' απεριοδική*) Μαρκοβιανή Αλυσίδα, υπάρχει το διάνυσμα των οριακών πιθανοτήτων $\pi = (\pi_0\ \pi_1\ \pi_2 \ldots)$ κ' ικανοποιεί τη σχέση: $\pi = \pi \cdot P$ με $\sum_{i=0} \pi_i = 1$, P: πίνακας μετάβασης ενός βήματος. Αν επιπλέον $x = (x_0\ x_1\ x_2 \ldots)$ λύση της $x = x \cdot P$ με $\sum_{i=0} |x_i| < \infty$ τότε $\pi = c \cdot x$ με $\sum_{i=0} \pi_i = 1$

<u>Αντίστροφα</u>: Μία Μη-Διαχ. απεριοδική Μαρκ. Αλυσίδα είναι θετικώς επική όταν $\exists x$ τέτοιο ώστε $x = xP$
με: (i) $\exists i \in \mathbb{N}: x_i \neq 0$
(ii) $\sum_{i=1} |x_i| < +\infty$

<u>Ορισμός</u>: Μία Μαρκ. Αλ. είναι <u>απεριοδική</u> αν ο ΜΚΔ των περιόδων των καταστάσεων της είναι 1.

<u>Μεθοδολογία</u>: • Αν με κάποιο τρόπο έχω αποφασίσει ότι η Μαρκ. Αλ. είναι Μη-διαχ. εργοδική τότε για να προσδιορίσω τις οριακές πιθανότητες βρίσκω τη λύση του $x = xP$ με $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| < +\infty$ και τότε $\Pi = c \cdot x$ με $\sum \Pi_i = 1$

• Αν για μία Μη-διαχ. απεριοδική Μαρκ. Αλυσίδα δεν έχω αποφασίσει αν είναι θετικώς επική τότε χρησιμοποιώ το <u>αντίστροφο</u> του Θ. Foster δηλαδή είναι θετικώς επική όταν υπάρχει $\exists x$ τ.ω. $x = x \cdot P$ με κάποιο $x_i \neq 0$ και $\sum |x_i| < +\infty$. Για αυτά τα x: οι οριακές πιθανότητες προσδιορίζονται από $\Pi = c \cdot x$ με $\sum \Pi_i = 1$. Για όλα τα άλλα οι οριακές πιθανότητες είναι 0.

3.10.8

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

2, 4 : παροδικές $\rightarrow$
$\rightarrow \Pi_2 = \Pi_4 = 0$
0, 1, 3 θετ. επικές

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$
$0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$

περίοδος του 0

$d_0 = \text{ΜΚΔ}\{2, 3, \dots\} = 1$

άρα $\text{ΜΚΔ}\{\overset{1}{d_0}, d_1, d_3\} = 1$.

$$x = x \cdot P \Rightarrow (x_0 \ x_1 \ x_3) = (x_0 \ x_1 \ x_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{4} x_1 + x_3 \\ x_1 = x_0 \\ x_3 = 3/4\, x_2 \end{cases} \Rightarrow x = \left(x_0, x_0, \frac{3}{4} x_0\right)$$

Για $x_0 = 4 \Rightarrow x = (4, 4, 3)$.

Άρα $\pi = (\pi_0\ \pi_1\ \pi_3) = c\cdot(4, 4, 3)$ τέτοια ώστε $\pi_0 + \pi_1 + \pi_3 = 0$. $\Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{11}}$

άρα $\pi_0 = \frac{4}{11}$, $\pi_1 = \frac{4}{11}$, $\pi_3 = \frac{3}{11}$

(iii) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος επανάληψης όλων των επαναληπτικών καταστάσεων.

$\lim\limits_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$ Ψάχνω μ_0, μ_1, μ_{3}

$\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}(1)}{\mu_j}$ Είναι $\mu_0 = \frac{1}{\pi_0}$

$\Rightarrow \mu_0 = \frac{11}{4}$, $\mu_1 = \frac{11}{4}$, $\mu_3 = \frac{11}{3}$

Θέλω και $\lim\limits_{n\to\infty} P_{01}^{(n)} = \frac{\overset{=1}{f_{01}(1)}}{\mu_1} = \frac{4}{11}$ (διότι $0 \leftrightarrow 1$ σε κλειστό κύκλωμα κ' έχω και Μη-διαχ. Μαρκ. Αλ.).

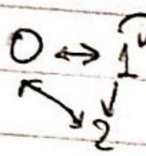
3.10.9. Διακοπές → Μπαχάμες / Ευρώπη / Χαβάη. Αν ήταν ~~...~~ στο 0 τον προηγ. χρόνο επιλέγει το 1 με πιθ 2/3 κ' το 3 με πιθ. 1/3. (όμοια θα ευρηθ. ο P).

(i) Να περιγραφεί ως Μαρκ. Αλυσ.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Λύση: X_n: η σ.δ. που δείχνει που πήγε διακοπές το n-οστό καλοκαίρι. Σ.Δ. με διακριτό χρόνο κ' διακριτό χώρο καταστάσεων. Έχει τη Μαρκοβιανή Ιδιότητα γιατί το μέλλον εξαρτάται μόνο από το Παρόν κ' όχι από το παρελθόν. Είναι ομογενής γιατί οι πιθ. μετάβασης είναι ανεξάρτητες από το χρόνο πραγματο-

Ποίησης. Άρα πρόκειται για ομογενή Μαρκ. Αλυσίδα.



Όλες επικ. μεταξύ τους

Πεπ/νο πλήθος καταστ/σεων ⇒ Θετ. επαν/κή

$d_1 = 1$ διότι $P(1\to 1)>0$ και ΜΚΔ$\{1,\dots\}=1$

Η Αλυσίδα είναι απεριοδική

ΜΚΔ$\{d_0, \underbrace{d_1}_{1}, d_2\}=1$. Άρα εφαρμόζεται το Θ. Foster

$$(x_0,x_1,x_2) = (x_0,x_1,x_2)\cdot\begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/8 & 1/8 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3}{8}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \cancel{x_1 = \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{2}x_2} \\ x_2 = \frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{2}x_1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{8}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) + \frac{1}{2}x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{5}{8}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{3}{4}x_1}$$

και $x_0 = \frac{3}{8}x_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x_1 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{3}{4}x_1}$

άρα $x = \left(\frac{3}{4}x_1,\ x_1,\ \frac{3}{4}x_1\right)$

Για $x_1 = 4 \Rightarrow x = (3,4,3)$. $\Rightarrow \pi = \left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}\right)$

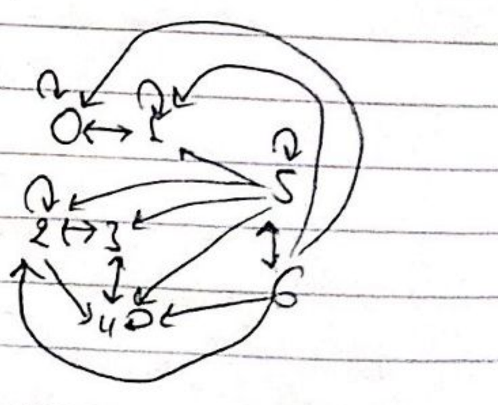
ή αλλιώς $\pi = (3c, 4c, 3c)$ με $3c+4c+3c=1$.

(ii) Αν φέτος είναι στο 1 μετά από πόσα χρόνια προσδοκά να επισκεφθεί ξανά την Ευρώπη; Ζητάει δηλαδή το $\mu_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{10}{4}$

3.10.7

$$P = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{array}$$

P_1, P_2



5: παροδική διότι $5 \to 1$ και αν 5: επαν. τότε θα πρέπει $1 \to 5$ άτοπο. $\Rightarrow \pi_5 = 0$

6: παροδική $6 \to 0$ εν. $0 \not\to 6$ (με το ίδιο άτοπο). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_6 = 0$.

$\{0,1\}$ κλ. κύκλωμα επίλυτων καταστάσεων πεπερασμένου πλήθους καταστάσεων ⇒ θετικώς επαναληπτικές + απεριοδικές
$\{2,3,4\}$: όμοια ⇒ θετ. επ/κές + απεριοδικές ($2 \to 2$ σε ένα βήμα)
Άρα και για τις 2 Θ. Foster:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Αποτ.: $\pi_0 = \frac{7}{15}$, $\pi_1 = \frac{8}{15}$, $\pi_2 = \frac{6}{23}$, $\pi_3 = \frac{7}{23}$, $\pi_4 = \frac{10}{23}$.

Άσκ_23 (φυλλάδιο): ΣΠ → Γραφείο κ' βρέχει/χιονίζει με πιθ. P φοράει το σκούφο
Αν Γρ → Σπ βρέχει/χιονίζει με πιθ. P φοράει το σκούφο αλλιώς επειδή αφηρημένος, το αφήνει στο γραφείο.
X_n: η σ.δ. που παριστάνει τον αριθμό των σκούφων στην αρχή της n-οστής διαδρομής
(i) είναι Μαρκ. Αλυσ.; Να προσδ. ο Πενός Πίνακας.
(ii) Να βρεθεί η πιθ. μετά από πολλές μέρες, εκεί που βρίσκεται να μην υπάρχει σκούφος.

Λύση:

(i). σ.δ. σε διακριτό χρόνο αφού κοιτώ στην αρχή της διαδρομής. $S = \{0,1,2,3\}$.

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-P & P \\ 0 & 1-P & P & 0 \\ 1-P & P & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Παρόν: Σπ.
Μέλλον: Γρ
Αποτ. $\pi_0 = \frac{1-P}{4-P}$, $\pi_1 = \frac{1}{4-P}$

$\pi_2 = \frac{1}{4-P}$, $\pi_3 = \frac{1}{4-P}$.

(Ασκ. 4, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20–32, 34, 36, 37, 38, 40, 46, 56, 61)
εκτός: 8, 19, 57